МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

ФАКУЛЬТЕТ ПРИРОДНИЧИХ НАУК ТА ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра прикладної математики

Т.С. Кагадій, А.Г. Шпорта, О.Д. Оноприєнко

Основи дискретної математики
(частина 1)

Методичні рекомендації
до опанування лекційних занять
з дисципліни «Дискретна математика» здобувачами вищої освіти
спеціальності 113 Прикладна математика

Дніпро
НТУ «ДП»
2023

Кагадій Т.С.

Основи дискретної математики (частина 1). Методичні рекомендації до опанування лекційних занять з дисципліни «Дискретна математика» здобувачами вищої освіти спеціальності 113 Прикладна математика / Т.С. Кагадій, А.Г. Шпорта, О.Д. Онопрієнко ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2023. – 48 с.

Автори:
Т.С. Кагадій, проф.,
А.Г. Шпорта, доц.,
О.Д. Онопрієнко, доц.

Погоджено науково-методичною комісією спеціальності 113 Прикладна математика (протокол № 12/23 від 02.12.2023) за поданням кафедри прикладної математики (протокол № 11/23 від 14.11.2023).

Містить в скороченому вигляді теоретичні відомості з основних розділів дисципліни «Дискретна математика»: теорія множин, теорія відношень, булеві функції та перетворення. Наведено вичерпні розв’язки великої кількості прикладів, запропоновано варіанти для самостійного розв’язування. Матеріал викладено докладно і послідовно, що дає змогу вивчати його самостійно або при дистанційній формі навчання.

Відповідальна за випуск завідувачка кафедри прикладної математики О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

Зміст

Вступ

Основні способи подання інформації у світі є дискретними: це слова і конструкції мов і граматик - природні і формалізовані; табличні масиви дійсних даних; відомості соціальної, демографічної, економічної статистики тощо.

Методи обробки та аналізу такої дискретної інформації вивчає дискретна математика.

Методична розробка підготовлена для студентів, які вивчають математичні моделі або методи інформатики та техніки.

В матеріалах видання містяться основні теми та поняття дискретної математики (множини, реляційна теорія, булева алгебра). Всі розділи мають характер стислого конспекту лекцій і мають за мету спростити здобувачам сприйняття теоретичного матеріалу, особливо при дийстанційному навчанні.

Для кращого засвоєння в тексті наведено велику кількість розв'язаних прикладів, підібрані завдання для самостійного опрацювання.

Наведено варіанти прикладних задач, для розв'язання яких використовуються методи та алгоритми дискретної математики, що свідчить про актуальність та необхідність вивчення даної дисципліни.

Методична розробка адаптована як для самостійної, так і для аудиторної роботи та містить інформацію, без якої неможливе вивчення курсу «Дискретна математика». Зміст кожної лекції логічно структурований і підпорядкований певній темі.

<u>Розділ 1.</u> Множини. Дії з ними

Множина є загальним і водночас первинним поняттям. Тому його визначення надається інтуїтивно з використанням певного практичного досвіду. **Множина** - це сукупність елементів, що мають спільну властивість (властивості). Множини позначаються великими літерами, а їхні елементи — відповідними малими:

$$\begin{aligned} &A=\{a_1,a_2,...,a_n\};\\ &B=\{b_1,b_2,...,b_n\};\\ &N=\{1,2,3,...\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Елементами множини можуть бути інші множини.

$$\begin{aligned} &A=\{C,D\} \text{ or } A=\{\{c_1,c_2\},\{d_1,d_2,d_3\}\};\\ &B=\{b_1,\{a_1,a_2\}\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Множина називається **скінченною**, якщо вона містить скінченну кількість елементів, і **нескінченною**, якщо кількість елементів необмежена.

Як правило, порядок елементів у множині не грає ролі, але є множини, де такий порядок враховується. Наприклад, координати точки.

Якщо в умові задачі елемент повторюється, то в наборі, що відповідає мнржині, він записується один раз.

<u>Способи визначення множин.</u>

1. Перший спосіб – перерахування елементів (1).

Цей метод непридатний для нескінченних множин і навіть для скінченних з великою кількістю елементів (множина риб у Тихому океані).

2. Другий спосіб — задати конкретну властивість елементів.

Наприклад:

а) натуральні числа, менші за десять

$$N_{10}=\{x : x\in N,\ x<10\} \tag{3}$$

б) геометричне місце точок площини, рівновіддалених від центру.

3. Третій спосіб — рекурсивний, коли вказується спосіб отримання наступних елементів із попередніх. Наприклад, числа Фібоначчі (кожне число є сума двох попередніх).

<u>Основні поняття теорії множин.</u>

Дві множини називають **рівними**, якщо вони містять однакову множину елементів $A = B$.

Число (кількість) елементів у скінченній множині називають її **потужністю або кардинальним числом** і позначають $|A|$.

Множина *A*, усі елементи якої належать множині *B*, називається **підмножиною** множини *B.*

Відношення (підпорядкування) **нестрогого порядку** означає, що *A* є підмножиною *B* і може збігатися з *B,* $A \subseteq B$.

Відношення **строгого порядку** позначається як $A \subset B$. *A* є власною підмножиною *B.*

Множина, що містить усі можливі елементи ***для даної задачі,*** називається **універсальною** (або **універсумом**) *U.*

Множина, що не містить елементів, називається **порожньою** $\varnothing$.

Множину всіх підмножин множини А називають **булеаном** А і позначають

$$2^A. \qquad (4)$$

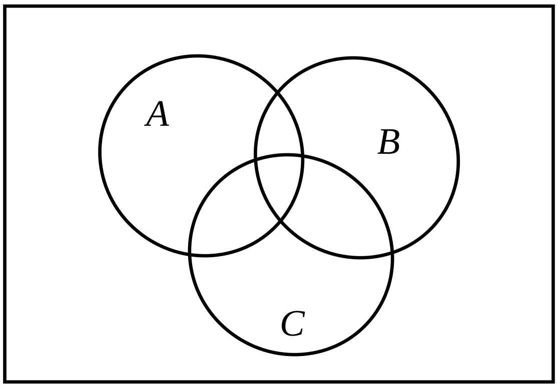
Потужність булеану обчислюється за формулою $|2^A| = 2^{|A|}$.

<u>Геометрична інтерпретація множин</u>

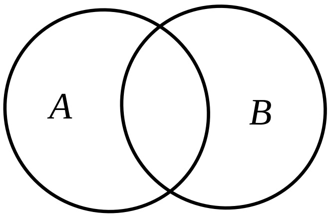
Для візуалізації зв’язків між підмножинами універсальної множини використовуються діаграми В’єнна та кола Ейлера.

Побудова діаграм В'єна складається з поділу площини на 2^n областей за допомогою n фігур.

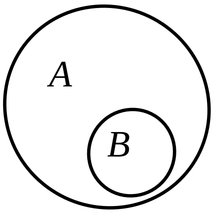
При цьому кожна наступна фігура повинна мати тільки одну спільну ділянку з кожною з раніше побудованих фігур.



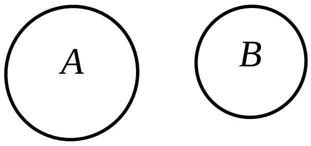
Діаграми Венна не відображають реальних зв'язків між множинами. Індивідуальні зв'язки між множинами представлені за допомогою кіл Ейлера.



Деякі *A* не є *B*



Усі *B є A*

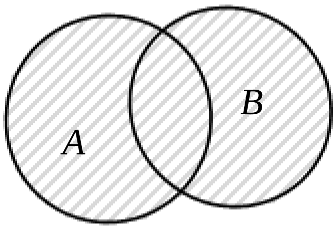


Жодні *A* не є *B*

<u>Операції над множинами</u>

1. **Об'єднання** (сума) — це множина, що складається з елементів, які належать множині *A* або множині *B*

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

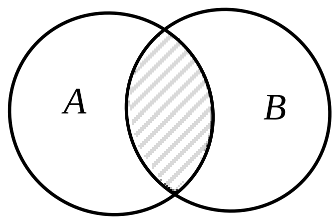


Приклад 1. $A = \{a,b,c\}$; $\text{B}=\{b,m,n\}$;

$A \cup B = \{a,b,c,m,n\}$;

2. **Перетин** (добуток) — це множина, що складається з елементів, які одночасно належать *A* і *B*

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$



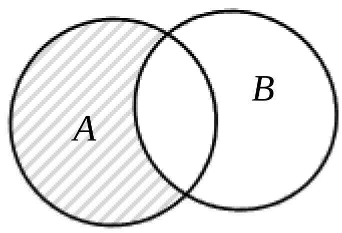
$A \cap B$

Приклад 2. $A = \{a,b,c\}$; B=$\{m,b,n\}$;

$A \cap B = \{b\}$;

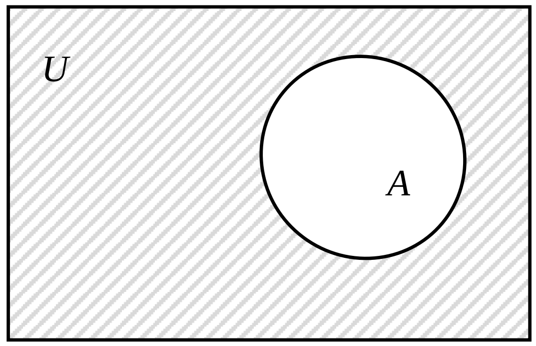
3. **Різниця** множин складається з усіх елементів, що належать першій множині, але не належать другій

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$$



4. **Заперечення** (доповнення) *A* складається з елементів, що не належать *A*

$$\overline{A} \text{ or } U \setminus A$$



Різниця множин може бути виражена через операції заперечення та перетину

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

<u>Алгебра множин</u>

Сукупність усіх підмножин універсальної множини із заданими операціями складають алгебру множин.

Алгебра множин широко використовується в програмуванні, зокрема, при роботі з базами даних, а також є основою багатьох математичних структур.

Крім того, все наше життя проходить серед множин, що взаємопов'язані.

При застосуванні операцій над множинами слід враховувати їх пріоритет.

1. $\overline{A}$ (заперечення);
2. $A \cap B$ (перетин);
3. $A \cup B$ (об'єднання);
4. $A \setminus B$ (різниця).

Приклад 3. $E = \left(A \setminus B \cup \overline{A} \cap D \right) \setminus B;$

$$E = \left(A \overset{4}{\setminus} \left(B \overset{3}{\cup} \left(\overset{1}{\overline{A}} \right) \overset{2}{\cap} D \right) \right) \overset{5}{\setminus} B;$$

В алгебрі множин діють такі закони

Комутативний закон:

$$A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A;$$

Асоціативний закон:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

Дистрибутивний закон:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Деякі властивості універсальних і порожніх множин:

$A \cup \varnothing = A;$ $\quad A \cap U = A;$

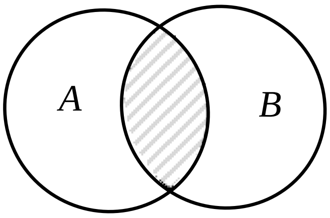
$A \cup U = U;$ $\quad A \cap \varnothing = \varnothing;$

$A \cup \overline{A} = U;$ $\quad A \cap \overline{A} = \varnothing;$ $\quad \overline{\overline{A}} = A;$

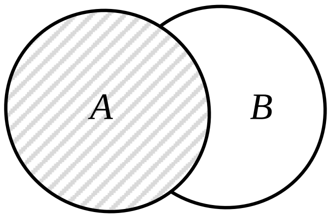
$A \cup A = A;$ $\quad A \cap A = A.$

Закон поглинання:

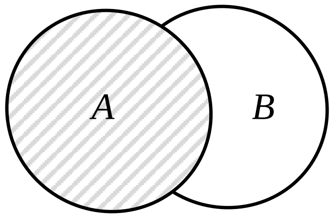
$$A \cup (A \cap B) = A; \qquad A \cap (A \cup B) = A.$$



$A \cap B$



A

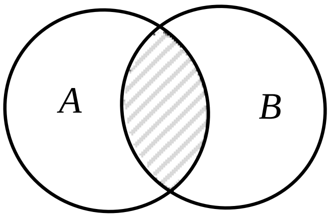


$A \cup (A \cap B)$

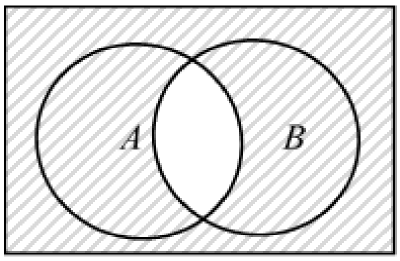
Аналогічно випливає друга рівність.

Закон де Моргана:

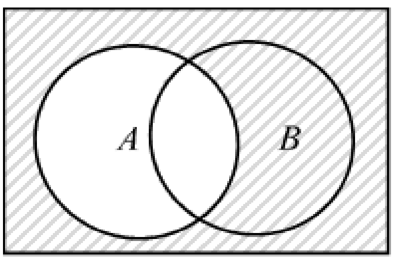
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$$



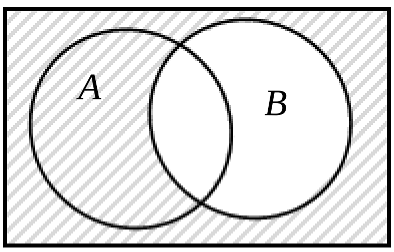
$A \cap B$



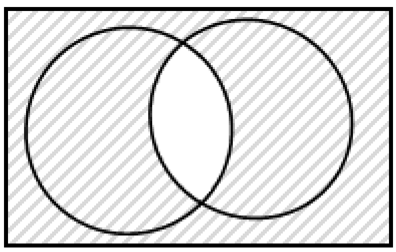
$\overline{A \cap B}$



$\bar{A}$



$\bar{B}$



$\bar{A} \cup \bar{B}$

Приклад 4. Спростіть вираз

$\overline{\left(\bar{A} \cup B \cup C\right)} \cap \left(A \cap \left(B \cup \bar{C}\right)\right) \cap \bar{B} =$ (застосовується закон де Моргана)

$= \left(\bar{A} \cap B \cap C\right) \cap \left(A \cap \left(B \cup \bar{C}\right)\right) \cap \bar{B} =$ (асоціативність і комутативність)

$= A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap A \cap \bar{B} \cap \left(B \cup \bar{C}\right) =$ (застосовується закон поглинання)

$= A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \left(B \cup \overline{C} \right) =$ (застосовується закон дистрибутивності)

$= A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap B \cap A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{C} =$ (властивість порожньої множини)

$= \varnothing \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}.$

Набір має бути визначений правильно. Наприклад, єдиний у місті перукар визначає багатьох чоловіків, яких голить, як таких, хто не голиться сам. Для кого це визначення некоректне?

Для самого перукаря. Він голиться сам, і його, при цьому, голить перукар.

Це протиріччя називається логічним парадоксом.

Контрольні питання

1. Що таке множина?
2. Якими способами можна задати множину?
3. Що таке операції над множинами?
4. Які властивості операцій над множинами?

<u>Розділ 2.</u> Відношення

Відношення реалізують у математичних термінах на абстрактних множинах реальні відношення між реальними об’єктами. Відношення використовуються при створенні комп’ютерних баз даних. Використовуючи зв'язки, вони описують (взаємозв’язки) відношення між різними групами даних, а також обробляють ці дані. Відношення використовуються в програмуванні. Складові структур даних описують деякі набори разом із зв’язками між елементами цих наборів.

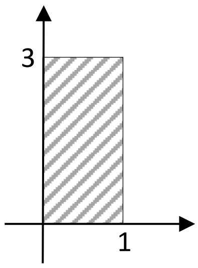
Для формального опису різних комбінацій з елементами множин, що входять до складу відношення, використовується поняття декартового добутку множин.

Декартовим добутком множин *A* і *B* є множина всіх видів пар, таких, що перший елемент пари з множини *A*, а другий з множини *B*.

$$A \times B = \left\{ \left(a, b \right) : a \in A,\ b \in B \right\}; \tag{1}$$

Приклад 1. $A=\{2,5,6\}$; $B=\{3,1,2\}$;

$$A\times B=\{(2,3)(2,1)(2,2)(5,3)(5,1)(5,2)(6,3)(6,1)(6,2)\};$$



Тривалий інтервал $A=[0,1]$; $B=[0,3]$;

Заштрихована ділянка є декартовим добутком.

Декартовим добутком n множин називається множина всіх можливих упорядкованих множин з n елементів, які називаються **кортежами** довжини n. Перший елемент **кортежу** належить до першої множини, другий – до другої множини і так далі.

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_4=\{(x_1,x_2,\ldots,x_4):x_1\in A_1,\ x_2\in A_2,\ldots,x_4\in A_4\};\qquad(2)$$

Якщо ту саму множину помножити декартовим добутком n разів, отримаємо **степінь множини**

$$\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n}=A^n;\qquad(3)$$

Приклад 2. $A=\{a,b,c\}$;

$$A^2=\{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(b,c)(c,a)(c,b)(c,c)\};$$

Кількість елементів або потужність (кардинальне число) степеня множини визначається за формулою

$$\left|A^n\right|=\left|A\right|^n;\qquad(4)$$

Приклад 3. $\left|A\right|=3$; $\left|A^2\right|=3^2=9.$

Декартів добуток некомутативний. Дійсні також наступні властивості:

$$A\times B\neq B\times A;$$

$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C=A\times B\times C,\qquad A\times(B\cup C)\neq(A\times B)\cup(A\times C);$$

$$(5)$$

$$A\times(B\setminus C)\neq(A\times B)\setminus(A\times C);$$

Потужність (кардинальне число) декартового добутку визначається за формулою

$$\left|A\times B\right|=\left|B\times A\right|=\left|A\right|\cdot\left|B\right|. \tag{6}$$

Відношення (n-арне відношення) R на множинах $X_1, X_2, \ldots$ є підмножиною декартового добутку цих n множин

$$R\subseteq X_1\times\ldots\times X_n. \tag{7}$$

Якщо n=1, ми маємо унарне відношення, якщо n=2 **- бінарне**

$$\left(x,y\right)\in R \text{ or } xRy. \tag{8}$$

Бінарні відношення є основними. Оскільки декартів добуток є асоціативним, його можна представити у вигляді ланцюжка бінарних відношень.

<u>*Способи завдання бінарних відношень*</u>

1) Відношення можна задати як список пар, з яких складається відношення $A=\left\{1,2,3,4,7\right\}$, $B=\left\{24,25,26\right\}$:

«дільник», «бути дільником числа», «x дільник y». (9)

$R=\left\{(1,24)(1,25)(1,26)(2,24)(2,26)(3,24)(4,24)\right\}$;

2) Другий спосіб - за допомогою матриці

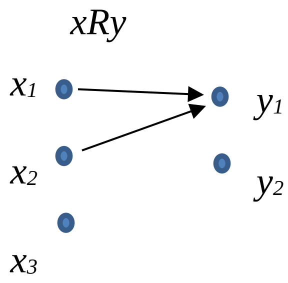
(10)

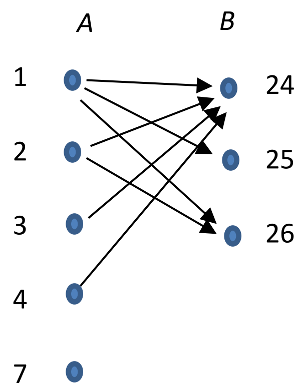
A \ B	24	25	26
1	1	1	1
2	1	0	1
3	1	0	0
4	1	0	0
7	0	0	0

A \ B	стовпці
рядки	

3) Відношення можна графічно представити за допомогою форми, яка називається **графом**. Елементи множин *X* і *Y* зображаються на площині точками.

Якщо пара *(x, y)* належить відношенню, то точки з'єднуються лінією, спрямованою від першого елемента до другого (дуга). Самі точки називаються вершинами графа.





(11)

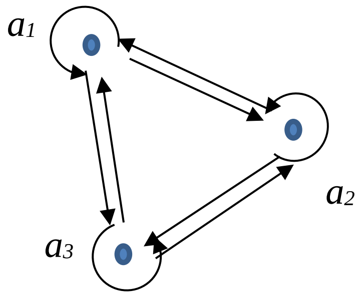
Історично першим графом можна вважати генеалогічне дерево. Можна розглянути родинні зв'язки.

<u>Деякі особливі випадки</u>

Нехай на множині *A* задано бінарне відношення: $R \subseteq A^2$.

1) Якщо $R = A^2$, тоді відношення називається **повним**. Які його матриця і граф?

A \ A	a_1	a_2	a_3
a_1	1	1	1
a_2	1	1	1
a_3	1	1	1

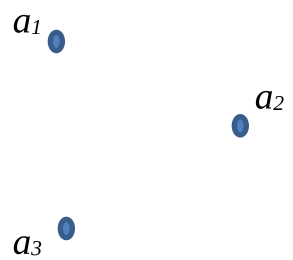


(12)

Матриця складається з одиниць, граф також називається повним і зображений на малюнку.

2) Якщо $R=\varnothing$ тоді множина називається **порожньою**.

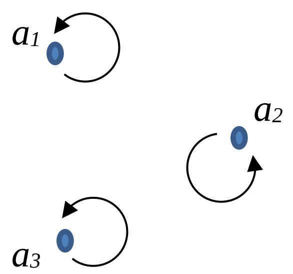
$A \backslash A$	a_1	a_2	a_3
a_1	0	0	0
a_2	0	0	0
a_3	0	0	0



(13)

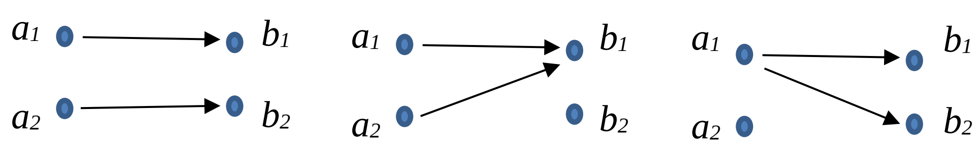
3) Якщо відношення містить лише пари виду *(a, a)*, то воно називається **тотожним**. У матриці на головній діагоналі розташовані одиниці, а решта елементів - нулі. Граф містить лише петлі.

$A \backslash A$	a_1	a_2	a_3
a_1	1	0	0
a_2	0	1	0
a_3	0	0	1



Якщо пари *(x, y)* складають відношення, то впорядковані пари *(y, x)* складають **зворотне** відношення. На графіку дуги спрямовані в протилежний бік.

Зв'язок між множинами *X* і *Y* називається **функціональним**, якщо всі його елементи (впорядковані пари) відрізняються у першому елементі. Відношення на третьому малюнку не є функціональним.



(14)

<u>Властивості бінарних відношень</u>

1. Відношення на множині X називається **рефлексивним**, якщо воно виконується для будь-якого елемента відносно самого себе. У матриці такого відношення є одиниці на головній діагоналі. У графі кожна вершина має петлю.

2. Відношення називається **антирефлексивним**, якщо з умови $x_1 R x_2$, випливає, що $x_1 \neq x_2$. У матриці всі діагональні елементи дорівнюють нулю, а в графі петель немає.

Відношення ≤ на множині дійсних чисел є рефлексивним, відношення < на множині дійсних чисел є антирефлексивним. Відношення «мати спільний дільник» на множині цілих чисел є рефлексивним, відношення «бути сином» на множині людей є антирефлексивним.

3. Відношення називається **симетричним**, коли воно виконується від першого елемента до другого, і також виконується від другого до першого.

Матриця симетрична відносно головної діагоналі. На графіку всі дуги паралельні.

4. Відношення називається **асиметричним**, якщо з виконання від першого елемента до другого випливає, що відношення не виконується від другого до першого.

5. Відношення називається **антисиметричним**, якщо з виконання його від першого елемента до другого і від другого до першого випливає, що ці елементи рівні.

6. Відношення називається **транзитивним**, якщо з виконання його від першого елемента до другого і від другого до третього випливає, що воно виконується від першого до третього.

7. Відношення називається **антитранзитивним**, якщо з виконання від першого елемента до другого і від другого до третього випливає, що від першого до третього відношення не виконується.

Відношення «бути рівним», «бути дільником» на множині цілих чисел, а також відношення «жити в одному місті» на множині людей є транзитивними, а відношення «бути сином» — антитранзитивно.

Найчастіше використовуються наступні класи бінарних відношень:

1. Відношення еквівалентності має властивості рефлексивності, симетрії та транзитивності.

2. Нестроге відношення порядку має властивості рефлексивності, антисиметрії та транзитивності.

3. Відношення строгого порядку має властивості антирефлексивності, асиметрії та транзитивності.

4. Відношення толерантності має властивості рефлексивності, симетрії та антитранзитивності.

Контрольні питання

1. Побудуйте матрицю та графік для наступного відношення, визначеного на множині $A=\{1,2,3\}$.

a) $\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$;

b) $\{(1,1),(2,1),(2,3),(2,3)\}$;

c) $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$;

d) $\{(1,3),(3,1)\}$.

2. Побудувати граф і список елементів (елементів) для відношень $A=\{a,b,c\}$.

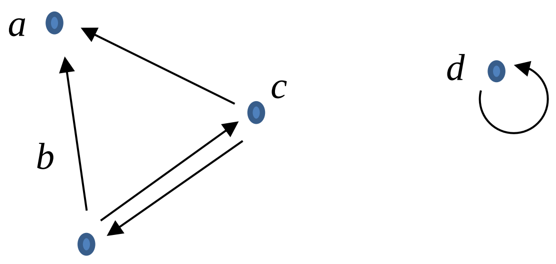
$A \backslash A$	a	b	c
a	1	0	1
b	0	1	0
c	1	0	1

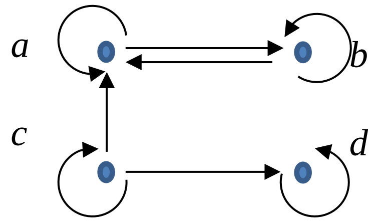
$A \backslash A$	a	b	c
a	0	1	0
b	0	1	0
c	0	1	0

$A \backslash A$	a	b	c
a	1	1	1
b	1	0	1
c	1	1	1

$A \backslash A$	a	b	c
a	1	0	1
b	0	1	0
c	1	0	1

3. Побудуйте матрицю та список елементів для відносин





4. Напишіть список елементів для тривимірного відношення, заданого на множині натуральних чисел $(a,b,c)\in R:\ \ 0<a<b<c<5$.

5. Напишіть список елементів для 4-значного відношення, заданого на множині натуральних чисел $(a,b,c,d)\in R,\ \ abcd=6$.

<u>Розділ 3.</u> Булеві функції

Джордж Буль розробив бінарний логічний апарат у середині 19-го століття. Ця алгебраїчна структура є алгеброю і називається булевою. Булева алгебра використовується при роботі з базами даних, проектуванні інтелектуальних систем, для аналізу роботи комп'ютерів та інших електронних пристроїв.

Розглянемо **двоелементну множину *B***, елементи якої позначено $\{1,0\}$.

Змінні, які можуть приймати значення тільки з множини B, називаються логічними або **булевими змінними**. 0 і 1 є логічними (булевими) константами.

Функція виду $y = f(x_1, x_2,...x_n)$, аргументи і значення якої належать множині *B*, називається булевою функцією.

Набір із n конкретних значень булевих змінних $(x_1, x_2,...x_n)$ називається двійковим словом або інтерпретацією булевої функції.

Кількість усіх можливих булевих функцій від n змінних дорівнює 2^{2^n}.

Кількість значень, що приймає функція n змінних, дорівнює 2^n.

Змінна x n-вимірної булевої функції називається **фіктивною** якщо

$$f(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n) = f(x_1,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n) \quad (1)$$

для будь-яких значень решти змінних. Фіктивну змінну можна видалити або ввести. Решта змінних називають **значущими**.

Приклад 1. Функція трьох змінних приймає значення (10011110). Визначте, які зі змінних є фіктивними, а які – значущими.

xyz	*f(x,y,z)*
000	1
001	0
010	0
011	1
100	1
101	1
110	1
111	0

1) $f(000) = f(100)$, $f(001) \neq f(101)$

x - значуща;

2) $f(000) \neq f(010)$, y - значуща;

3) $f(000) \neq f(001)$, z - значуща.

Способи визначення булевих функцій

1. Використання таблиці істинності.

2. Використання порядкового номера.

3. Використання формули.

Таблиці, в яких кожен набір змінних відповідає значенню функції, називаються **таблицею істинності**. Набір значень змінних записується в порядку зростання чисел у двійковій системі. Розглянемо булеві функції однієї змінної (табл. 1) і двох змінних (табл. 2).

Таблиця 1

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$\varphi_0 = 0$ - сталий 0;

$\varphi_1 = x$ - функція повторення аргументу;

$\varphi_2 = \bar{x}$ - функція заперечення аргументу;

$\varphi_3 = 1$ - стала 1

Таблиця 2

Функція	*Позначення та назва*
$f_0(x,y)$	0, стала 0
$f_1(x,y)$	$x \wedge y = xy$, кон’юнкція ("x and y")
$f_2(x,y)$	$x \setminus y$, різниця , ("$x \wedge \overline{y}$")("x and not y")
$f_3(x,y)$	x; повторення першого аргументу
$f_4(x,y)$	$y \setminus x$, обернена різниця ("$y \wedge \overline{x}$")("y and not x")
$f_5(x,y)$	y; повторення другого аргументу
$f_6(x,y)$	$x \oplus y$, "XOR", "modulo 2 sum", "за модулем 2 сума"
$f_7(x,y)$	$x \vee y$, диз'юнкція ("x or y")
$f_8(x,y)$	$x \downarrow y$, стрілка Пірса ("not x and not y")
$f_9(x,y)$	$x \square y$, еквівалентність
$f_{10}(x,y)$	$\overline{y}$, заперечення другого аргументу, "not y"
$f_{11}(x,y)$	$y \to x$, зворотний наслідок
$f_{12}(x,y)$	$\overline{x}$, заперечення першого аргументу, "not x"
$f_{13}(x,y)$	$x \to y$, імплікація (наслідування)
$f_{14}(x,y)$	$x \mid y$, штрих Шеффера , ("$\overline{x}$ or $\overline{y}$")
$f_{15}(x,y)$	1, стала 1

Пріоритет операцій: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквівалентність.

У булевій алгебрі для основних операцій діють ті ж закони, що і в теорії множин.

Приклад 2. Побудуйте таблицю істинності для функції за заданою формулою

$$f(x,y,z) = x \to y \wedge z \vee \overline{x}$$

	4		*2*		*3*	*1*	
x	$\rightarrow$	y	$\wedge$	z	$\vee$	--	x
0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1

Функція $f_*(x_1,...,x_n)$ називається **двоїстою** до функції $f(x_1,...,x_n)$, якщо $f_*(x_1,...,x_n)=\overline{f}(\overline{x_1},...,\overline{x_n})$.

Функція називається **самодвоїстою**, якщо $f_* = f$.

Щоб побудувати таблицю істинності функції, двоїстої до заданої, необхідно змінити кожне значення булевої функції в таблиці істинності цієї функції та записати отриманий стовпець у зворотному порядку.

Контрольні питання

1. Що таке таблиця істинності функції?
2. У якому порядку виконуються операції булевої алгебри?
3. Що таке фіктивна змінна?
4. На якому наборі розглядаються булеві змінні?

<u>Розділ 4.</u> Диз'юнктивні розкладання булевих функцій

Серед множини еквівалентних формул, які представляють обрану булеву функцію, виділяється одна формула, яка називається ідеальною нормальною формою функції.

Ця форма має регламентовану логічну структуру і однозначно визначається типом функції. Побудова цієї форми базується на рекурентному застосуванні теорем про спеціальне розкладання булевих функцій за змінними. Розглянемо деякі з цих теорем.

Для спрощення математичних розрахунків введемо двійковий параметр σ і позначення x^{σ} наступним чином: $x,\ \sigma \in B = \{0;1\}$,

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \overline{x}, \text{ if } \sigma = 0, \\ x, \text{ if } \sigma = 1. \end{cases}$$

Ми можемо зробити такий висновок $x^{\sigma} = \begin{cases} 1, \text{ if } x = \sigma, \\ 0, \text{ if } x \neq \sigma. \end{cases}$

Безпосередньо перевіряється, що двійкова функція $f(x,\sigma) = x^{\sigma}$ представлена формулою $x^{\sigma} = x\sigma \vee \overline{x}\overline{\sigma}$.

<u>**Теорема 1.**</u> Про диз'юнктивне розкладання булевої функції по k змінних.

Будь-яка булева функція $f(x_1,...,x_n)$ може бути представлена в такому вигляді:

$$f(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k)} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} ... \wedge x_k^{\sigma_k} \wedge f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k,x_{k+1},...,x_n).$$

Запис $\bigvee\limits_{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k)}$ означає кратну диз'юнкцію, яка береться на всі можливі набори значень $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k)$ для будь-якого k $(1 \leq k \leq n)$.

Приклад 1. Запишіть диз'юнктивне розкладання функцій за змінними x, y.

$$f(x,y,z,t) = \left(\overline{x \wedge y \vee \overline{z}}\right) \wedge t.$$

За теоремою про розкладання маємо

$$f(x,y,z,t) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2)} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge f(\sigma_1,y,\sigma_2,t) = \overline{x} \wedge \overline{z} \wedge f(0,y,0,t) \vee$$

$$\vee \overline{x} \wedge z \wedge f(0,y,1,t) \vee x \wedge \overline{z} \wedge f(1,y,0,t) \vee x \wedge z \wedge f(1,y,1,t).$$

У прикладі значок «$\wedge$» кон'юнкції ***не можна писати****, як для множення:* $x \wedge z \wedge \overline{y} \wedge t = xz\overline{y}t$.

Обчисліть значення функції для кожного набору змінних (таблиця істинності).

$f(0,y,0,t)=\left(\overline{0\wedge y\vee\overline{0}}\right)\wedge t=0;$

$f(0,y,1,t)=\left(\overline{0\wedge y\vee\overline{1}}\right)\wedge t=t;$

$f(1,y,0,t)=\left(\overline{1\wedge y\vee\overline{0}}\right)\wedge t=0;$

$f(1,y,1,t)=\left(\overline{1\wedge y\vee\overline{1}}\right)\wedge t=\overline{y}\wedge t;$

Отримані значення підставимо в розклади

$$f(x,y,z,t)=\overline{x}\wedge\overline{z}\wedge 0\bigvee\overline{x}\wedge z\wedge t\bigvee x\wedge\overline{z}\wedge 0\bigvee x\wedge z\wedge\overline{y}\wedge t=$$

$$=\overline{x}\wedge z\wedge t\bigvee x\wedge z\wedge\overline{y}\wedge t.$$

<u>Наслідок 1</u>

Диз'юнктивне розкладання функції за однією змінною має вигляд

$$f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)=\overline{x_i}\wedge f(x_1,x_2,\dots,0,x_{i+1},\dots,x_n)\bigvee x_i\wedge f(x_1,x_2,\dots,1,x_{i+1},\dots,x_n).$$

Для попереднього прикладу ми маємо

$$f(x,y,z,t)=\overline{x}\wedge f(0,y,z,t)\bigvee x\wedge f(1,y,z,t)=\overline{x}zt\bigvee x\overline{y}zt.$$

(Перевірте самостійно).

<u>Наслідок 2</u>

Диз'юнктивне розкладання функції за всіма n змінними має вигляд

$\left(f(x_1,x_2,\dots,x_n)\neq 0\right).$

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\wedge x_2^{\sigma_2}\wedge\dots\wedge x_n^{\sigma_n}.$$

Запис $\bigvee\limits_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k) \\ f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=1}}$ означає, що диз'юнкція береться на всі набори значень, на яких $f\left(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n\right)=1$.

Приклад 2. Знайти диз'юнктивне розкладання функції за всіма змінними.

$f\left(x,y,z\right)=xy\vee z.$

Визначте значення функції для кожної інтерпретації

$\underline{f\left(0,0,0\right)}=0\wedge 0\vee \bar{0}=0\vee 1=1;$

$f\left(0,0,1\right)=0\wedge 0\vee \bar{1}=0\vee 0=0;$

$\underline{f\left(0,1,0\right)}=0\wedge 1\vee \bar{0}=0\vee 1=1;$

$f\left(0,1,1\right)=0\wedge 1\vee \bar{1}=0\vee 0=0;$

$\underline{f\left(1,0,0\right)}=1\wedge 0\vee \bar{0}=0\vee 1=1;$

$f\left(1,0,1\right)=1\wedge 0\vee \bar{1}=0\vee 0=0;$

$\underline{f\left(1,1,0\right)}=1\wedge 1\vee \bar{0}=1\vee 1=1;$

$\underline{f\left(1,1,1\right)}=1\wedge 1\vee \bar{1}=1\vee 0=1.$

Тоді розкладання має вигляд

$$f\left(x,y,z\right)=x^0y^0z^0\vee x^0y^1z^0\vee x^1y^0z^0\vee x^1y^1z^0\vee x^1y^1z^1=$$
$$=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee \bar{x}y\bar{z}\vee x\bar{y}\bar{z}\vee xy\bar{z}\vee xyz.$$

Елементарна кон'юнкція - це кон'юнкція будь-якої кількості булевих змінних, взятих із запереченням або без нього, у якому кожна змінна зустрічається не більше одного разу.

Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) - це формула, яка зображена як диз'юнкція елементарних кон'юнкцій.

Елементарну кон'юнкцію **за всіма змінними** називають **мінтермом** функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, якщо $f\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\right) = 1$, тобто інтерпретація, що перетворює дану елементарну кон'юнкцію в одиницю, перетворює в одиницю і функцію f.

Мінтерм має властивості:

1. Мінтерм дорівнює одиниці лише у відповідному тлумаченні.

2. Значення мінтерма однозначно визначається номером відповідної інтерпретації.

3. Кон'юнкція будь-якої кількості різних мінтермів дорівнює нулю.

Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ) булевої функції — це формула, яка зображена як диз'юнкція мінтермів даної функції.

Приклад 3. Знайти диз'юнктивне розкладання функцій за змінними x, z: $\left(yx \vee x\bar{z}\right)\left(x \vee \bar{y}z\left(z \vee \bar{x}y\right)\right)$.

$$f\left(x, y, z\right) = x^0 z^0 f\left(0, y, 0\right) \vee x^0 z^1 f\left(0, y, 1\right) \vee x^1 z^0 f\left(1, y, 0\right) \vee x^1 z^1 f\left(1, y, 1\right) =$$

$$= x\bar{z} \cdot 1 \vee xzy.$$

$$f\left(0, y, 0\right) = \left(y0 \vee 0 \cdot 1\right)\left(0 \vee \bar{y} \cdot 0\left(0 \vee 1y\right)\right) = 0 \cdot \left(0 \vee 0\right) = 0;$$

$$f\left(0, y, 1\right) = \left(y0 \vee 0 \cdot 1\right)\left(0 \vee \bar{y} \cdot 1\left(1 \vee 1y\right)\right) = 0;$$

$$f\left(1, y, 0\right) = \left(y \cdot 1 \vee 1 \cdot 1\right)\left(1 \vee \bar{y} \cdot 0\left(0 \vee 0y\right)\right) = \left(y \vee 1\right) \cdot 1 = 1;$$

$$f\left(1, y, 1\right) = \left(y \cdot 1 \vee 1 \cdot 0\right)\left(1 \vee \bar{y} \cdot 1\left(1 \vee 0y\right)\right) = y \cdot 1 = y;$$

Приклад 4. Знайдіть ДДНФ $\left(x\left(\bar{x} \to y\right)\right) \to y$.

$$f\left(x, y\right) = x^0 y^0 f\left(0, 0\right) \vee x^0 y^1 f\left(0, 1\right) \vee x^1 y^0 f\left(1, 0\right) \vee x^1 y^1 f\left(1, 1\right) =$$

$$= \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y \vee xy.$$

$$f\left(0, 0\right) = 0 \to 0 = 1;$$

$$f\left(0, 1\right) = 0 \to 1 = 1;$$

$f(1,0)=(1\cdot(0\to 0))\to 0=1\to 0=0;$

$f(1,1)=(1\cdot(0\to 1))\to 1=1\to 1=1.$

Приклад 5. Знайдіть ДДНФ функції $f(x,y,z)=(1,1,0,1,0,0,0,0)$ (Значення з таблиці істинності.)

$f(x,y,z)=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee\bar{x}yz.$

xyz	*f(x,y,z)*
000	1
001	1
010	0
011	1
100	0
101	0
110	0
111	0

Приклад 6. Знайдіть таблицю істинності функції, якщо її ДДНФ: $x\bar{y}\bar{z}\vee\bar{x}y\bar{z}\vee x\bar{y}z.$

xyz	*f(x,y,z)*
000	0
001	0
010	1
011	0
100	1
101	1
110	0
111	0

Крнтрольні питання

1. Що таке диз'юнктивне розкладання булевої функції?
2. Що таке елементарна кон’юнкція?
3. Що таке ДНФ?

4. Що таке ДДНФ?

<u>Розділ 5.</u> Кон'юнктивні розкладання булевих функцій

Досконала диз'юнктивна нормальна форма функції є результатом диз'юнктивного розкладання функції за всіма змінними і містить лише операції $\wedge, \vee, \neg$.

Застосовуючи принцип двоїстості до ДНФ, ми отримуємо формулу для функції, що називається кон'юнктивним розкладанням.

<u>Теорема 2.</u> Про кон'юнктивне розкладання булевої функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ за k змінними.

Будь-яка булева функція $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ може бути представлена в такому вигляді:

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n\right) = \bigwedge_{(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k)} x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee ... \vee x_k^{\overline{\sigma_k}} \vee f\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k, x_{k+1}, ..., x_n\right).$$

Запис $\bigwedge\limits_{(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k)}$ означає множинну кон'юнкцію, яка береться за всі можливі набори значень $\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k\right)$ для будь-якого k.

Приклад 1. Напишіть кон'юнктивне розкладання функції за змінними x, t:

$$f\left(x, y, z, t\right) = \left(xy \vee \overline{z}\right)t.$$

За теоремою 2:

$$f\left(x, y, z, t\right) = \left(x^{\bar{0}} \vee t^{\bar{0}} \vee f\left(0, y, z, 0\right)\right)\left(x^{\bar{0}} \vee t^{\bar{1}} \vee f\left(0, y, z, 1\right)\right) \wedge$$

$$\wedge\left(x^{\bar{1}} \vee t^{\bar{0}} \vee f\left(1, y, z, 0\right)\right)\left(x^{\bar{1}} \vee t^{\bar{1}} \vee f\left(1, y, z, 1\right)\right).$$

$$f\left(0, y, z, 0\right) = \left(0 \wedge y \vee \overline{z}\right) \wedge 0 = 0;$$

$$f\left(0, y, z, 1\right) = \left(0 \wedge y \vee \overline{z}\right) \wedge 1 = \overline{z};$$

$$f\left(1,y,z,0\right)=\left(1\wedge y\vee \bar{z}\right)\wedge 0=0;$$

$$f\left(1,y,z,1\right)=\left(1\wedge y\vee \bar{z}\right)\wedge 1=y\vee \bar{z};$$

$$f\left(x,y,z\right)=\left(x\vee t\right)\left(x\vee \bar{t}\vee \bar{z}\right)\left(\bar{x}\vee t\right)\left(\bar{x}\vee \bar{t}\vee y\vee \bar{z}\right).$$

<u>Наслідок 1</u>

Кон'юнктивний розклад функції за однією змінною має вигляд

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\bigwedge_{\sigma_i} x_i^{\sigma_i}\vee f\left(x_1,x_2,...,x_{i-1},\sigma_i,x_{i+1},...,x_n\right).$$

<u>Наслідок 2</u>

Кон'юнктивний розклад функції за всіма n змінними має вигляд

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\bigwedge_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=0}} x_1^{\overline{\sigma_1}}\vee x_2^{\overline{\sigma_2}}\vee ...\vee x_n^{\overline{\sigma_n}}.$$

Запис $\bigwedge\limits_{f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=0}$ означає, що кон'юнкція поширюється на всі набори значень, на яких $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=0$.

Приклад 2. Знайти кон'юнктивний розклад функції за всіма змінними.

$$f\left(x,y,z\right)=xy\vee \bar{z}.$$

Визначте значення функції для кожної інтерпретації

$$f\left(0,0,0\right)=0\wedge 0\vee \bar{0}=0\vee 1=1;$$

$$f\left(0,0,1\right)=0\wedge 0\vee \bar{1}=0\vee 0=0;$$

$$f\left(0,1,0\right)=0\wedge 1\vee \bar{0}=0\vee 1=1;$$

$$f\left(0,1,1\right)=0\wedge 1\vee \bar{1}=0\vee 0=0;$$

$$f\left(1,0,0\right)=1\wedge 0\vee \bar{0}=0\vee 1=1;$$

$$f\left(1,0,1\right)=1\wedge 0\vee \bar{1}=0\vee 0=0;$$

$$f\left(1,1,0\right)=1\wedge 1\vee \bar{0}=1\vee 1=1;$$

$$f(1,1,1) = 1 \wedge 1 \vee \bar{1} = 1 \vee 0 = 1;$$

$$f(x,y,z) = \left(x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}}\right)\left(x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{1}}\right)\left(x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}}\right) =$$

$$= \left(x \vee y \vee \bar{z}\right)\left(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}\right)\left(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}\right).$$

Елементарна диз'юнкція - це диз'юнкція будь-якої кількості булевих змінних, взятих із запереченням або без нього, у якому кожна змінна зустрічається не більше одного разу.

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) - це формула, що зображена у вигляді кон'юнкції елементарних диз'юнкцій.

Елементарна диз'юнкція $x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}$ називається **макстермом** функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$, тобто інтерпретація, яка перетворює дану елементарну диз'юнкцію в нуль, перетворює її в нуль і функцію f.

Макстерм має властивості:

1. Макстерм дорівнює нулю тільки на відповідних інтерпретаціях.

2. Значення макстерму однозначно визначається номером відповідної інтерпретації.

3. Диз'юнкція будь-якої кількості різних макстермів є одиницею.

Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ) булевої функції — це формула, яка зображена як кон'юнкція макстермів даної функції.

З аналізу ДДНФ і ДКНФ функцій можна зробити такі висновки:

1. Для кожної ненульової булевої функції існує зображення у вигляді досконалої диз'юнктивної нормальної форми.

2. Для кожної неодиничної булевої функції існує зображення у вигляді досконалої кон'юнктивної нормальної форми.

3. Дві різні булеві функції не можуть мати однаковий ДДНФ або ДКНФ.

4. Для кожної булевої функції існує зображення у вигляді формули булевої алгебри, що містить лише операції диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення.

Здійснити перехід від таблиці істинності булевої функції до її ідеальних форм і навпаки досить просто. Розв'язки деяких важливих рівнянь наведено далі. ***Студентам пропонується самостійно заповнити колонки в таблицях істинності***.

Приклад 1. Знайдіть ДДНФ і ДКНФ для функції $f=\left(\overline{x\vee y}\right)\left(x\to y\right)$.

1) Будуємо таблицю істинності

xy	f
00	1
01	0
10	0
11	0

$$f\left(0,0\right)=\left(\overline{0\vee 0}\right)\left(0\to 0\right)=1\cdot 1=1;$$

$$f\left(0,1\right)=\left(\overline{0\vee 1}\right)\left(0\to 1\right)=\bar{1}\wedge 1=0\wedge 1=0;$$

$$f\left(1,0\right)=\left(\overline{1\vee 0}\right)\left(1\to 0\right)=\bar{1}\cdot 0=0\cdot 0=0;$$

$$f\left(1,1\right)=\left(\overline{1\vee 1}\right)\left(1\to 1\right)=\bar{1}\cdot 1=0\cdot 1=0;$$

Як багато термів містить ДДНФ, ДКНФ?

ДДНФ: $f=\bar{x}\bar{y}$;

ДКНФ: $f=\left(x\vee \bar{y}\right)\left(\bar{x}\vee y\right)\left(\bar{x}\vee \bar{y}\right)$.

Приклад 2. Побудуйте таблиці істинності для функцій, заданих ідеальними нормальними формулами.

1. ДДНФ:

xyz	f_1	f_2	f_3
000	0		
001	1		
010	0		
011	0		
100	1		
101	0		
110	0		
111	1		

a) $f_1\left(x,y,z\right)=xyz\vee x\bar{y}\bar{z}\vee \bar{x}\bar{y}\bar{z};$

b) $f_2\left(x,y,z\right)=xy\bar{z}\vee \bar{x}yz\vee x\bar{y}z;$

c) $f_3\left(x,y,z\right)=\bar{x}yz\vee x\bar{y}\bar{z}\vee \bar{x}y\bar{z}.$

2. ДКНФ:

xyz	f_1	f_2	f_3
000	1		
001	0		
010	0		
011	1		
100	1		
101	0		
110	1		
111	1		

a) $f_1(x,y,z)=(\bar{x}\vee y\vee \bar{z})(x\vee \bar{y}\vee z)(x\vee y\vee \bar{z})$;

b) $f_2(x,y,z)=(\bar{x}\vee y\vee z)(x\vee \bar{y}\vee \bar{z})(\bar{x}\vee \bar{y}\vee z)$;

c) $f_3(x,y,z)=(\bar{x}\vee \bar{y}\vee \bar{z})(x\vee y\vee z)(\bar{x}\vee y\vee \bar{z})$;

Приклад 3. Знайдіть ДДНФ для функцій

a) $f_1(x,y,z)=(0,1,1,1,0,0,1,0)$;

b) $f_2(x,y,z)=(x\wedge y)\to z$;

Таблиця істинності:

xyz	f_1	f_2
000	0	
001	1	
010	1	
011	1	
100	0	
101	0	
110	1	
111	0	

$$f_1(x,y,z)=\bar{x}\bar{y}z\vee \bar{x}y\bar{z}\vee \bar{x}yz\vee xy\bar{z};$$
$$f_2(x,y,z)=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee \bar{x}\bar{y}z\vee \bar{x}y\bar{z}\vee \bar{x}yz\vee x\bar{y}\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee xyz;$$

Приклад 4. Знайдіть ДКНФ для функцій

a) $f_1(x,y,z)=(1,0,0,1,0,0,0,1)$;

b) $f_2(x,y,z)=x\vee \bar{y}z\vee \bar{z}$;

Таблиця істинності:

xyz	f_1	f_2
000	1	
001	0	
010	0	
011	1	
100	0	

101	0	
110	0	
111	1	

$$f_2(0,0,0)=0\vee 1\cdot 0\vee 1=1;$$
$$f_2(0,0,1)=0\vee 1\cdot 1\vee 0=1;$$
$$f_2(0,1,0)=0\vee 0\cdot 0\vee 1=1;$$
$$f_2(0,1,1)=0\vee 0\cdot 1\vee 0=0;$$
$$f_2(1,0,0)=1\vee 1\cdot 0\vee 1=1;$$
$$f_2(1,0,1)=1\vee 1\cdot 1\vee 0=1;$$
$$f_2(1,1,0)=1\vee 0\cdot 0\vee 1=1;$$
$$f_2(1,1,1)=1\vee 0\cdot 1\vee 0=1;$$
$$f_1(x,y,z)=\left(x\vee y\vee \overline{z}\right)\left(x\vee \overline{y}\vee z\right)\left(\overline{x}\vee y\vee z\right)\wedge;\left(\overline{x}\vee y\vee \overline{z}\right)\left(\overline{x}\vee \overline{y}\vee z\right);$$
$$f_2(x,y,z)=\left(x\vee \overline{y}\vee \overline{z}\right);$$

Приклад 5. Знайдіть досконалу диз’юнктивну нормальну форму для функції, заданої порядковим номером $f_{201}(x,y,z)$.

1) Перетворіть 201 у двійкову систему (почніть із максимально можливого ступеня 2).

$$201=128+64+8+1=1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+0\cdot 2^5+0\cdot 2^4+$$
$$+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0;$$

xyz	*f*
000	1
001	1
010	0
011	0
100	1
101	0
110	0
111	1

$f(x,y,z)=\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\vee \overline{x}\,\overline{y}z\vee x\overline{y}\,\overline{z}\vee xyz$ (PDNF).

Контрольні питання

1. Що таке кон'юнктивне розкладання булевої функції?

2. Що таке елементарна диз'юнкція?

3. Що таке КНФ?

4. Що таке ДКНФ?

<u>Розділ 6.</u> Алгебра Жегалкіна

Алгебра $\left(B,\wedge,\oplus,0,1\right)=0$, отримана на множині $B=\left\{0;1\right\}$ разом з операціями $\wedge,\oplus$ (сума по модулю 2) і константами 0,1, називається **алгеброю Жегалкіна**.

Сума за модулем 2 — це залишок від ділення суми чисел на 2. Ця ж операція називається *XOR*. Результати цієї операції знаходяться в стандартній таблиці істинності. Легко запам'ятати, якщо додаються однакові елементи, результат дорінює 0, якщо підсумовуються різні елементи, результат 1.

У цій алгебрі кожен елемент обернений сам собі. Наприклад, щоб розв’язати рівняння, достатньо до обох частин рівняння додати однакові елементи.

$$x\oplus a=b \;\Rightarrow\; x\oplus \underbrace{a\oplus a}_{=0}=b\oplus a \;\Rightarrow\; x=b\oplus a.$$

<u>Основні тотожності</u> алгебри Жегалкіна

1. Комутативний закон

$$x\wedge y=y\wedge x,\quad x\oplus y=y\oplus x.$$

2. Асоціативний закон

$$x\wedge\left(y\wedge z\right)=\left(x\wedge y\right)\wedge z,\quad x\oplus\left(y\oplus z\right)=\left(x\oplus y\right)\oplus z.$$

3. Дистрибутивний закон

$$x\wedge\left(y\oplus z\right)=xy\oplus xz.$$

4. Закон самопоглинання

$$x\wedge x=x,\quad x\oplus x=0.$$

5. Дії з 0 і 1

$$x \wedge 0 = 0, \quad x \wedge 1 = x, \quad x \oplus 0 = x.$$

З попередньої лекції ми знаємо, що будь-яка булева функція може бути представлена за допомогою операцій кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення.

Для алгебри Жегалкіна необхідно виразити заперечення і диз'юнкцію через кон'юнкцію і суму за модулем два.

$$\overline{x} = x \oplus 1;$$
$$x \vee y = xy \oplus x \oplus y.$$

Серед усіх еквівалентних зображень функції в алгебрі Жегалкіна виділяють особливу форму формул - поліном Жегалкіна.

Поліном Жегалкіна — це представлення булевої функції у вигляді скінченної суми за модулем двох попарно різних елементарних кон'юнкцій на множині змінних $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ і, можливо, одиниці.

Кількість змінних у будь-якій елементарній кон'юнкції є її рангом. Кількість різних елементарних кон'юнкцій є довжиною многочлена.

Приклад 1. Зобразіть функцію логічної імплікації у вигляді полінома Жегалкіна

$$f(x, y) = x \to y.$$

1) Знайдіть ДДНФ

$$x \to y = x^0 y^0 f(0,0) \vee x^0 y^1 f(0,1) \vee x^1 y^0 f(1,0) \vee x^1 y^1 f(1,1) =$$
$$= \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x} y \vee xy,$$
$$\left(f(1,0) = 0 \right).$$

Спростимо формулу за допомогою елементарних перетворень, додамо другий доданок і утворимо дужки.

$$\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x} y \vee \overline{x} y \vee xy = \left(\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x} y \right) \vee \left(\overline{x} y \vee xy \right) = \overline{x} \left(\overline{y} \vee y \right) \vee y \left(\overline{x} \vee x \right) =$$

$$=\overline{x}\vee y;$$

$$\overline{x}\vee y=(x\oplus 1)\vee y=(x\oplus 1)y\oplus(x\oplus 1)\oplus y=$$

$$=xy\oplus y\oplus x\oplus 1\oplus y=xy\oplus x\oplus 1.$$

Булева функція називається лінійною, якщо її поліном Жегалкіна не містить кон'юнкції змінних.

Приклад 2. Дослідити лінійність функції

$$f(x,y,z)=(x\vee y)\to\overline{z}.$$

Використовуємо відомі або знайдені представлення функцій через поліном

$$\left(x\to y=\overline{x}\vee y=xy\oplus x\oplus 1;\;\; x\vee y=xy\oplus x\oplus y;\;\; \overline{x}=x\oplus 1\right);$$

$$(x\vee y)\overset{(1)}{\to}\overline{z}=(x\overset{(2)}{\vee} y)\cdot\overline{z}\oplus(x\overset{(2)}{\vee} y)\oplus 1=(xy\oplus x\oplus y)\cdot(z\oplus 1)\oplus xy\oplus x\oplus y\oplus 1=$$

$$=xyz\oplus xz\oplus yz\oplus\underline{\underline{xy}}\oplus\underline{x}\oplus\underset{\sim}{y}\oplus\underline{\underline{xy}}\oplus\underline{x}\oplus\underset{\sim}{y}\oplus 1=xyz\oplus xz\oplus yz\oplus 1.$$

Функція нелінійна.

Існує **два зручних способи побудови поліномів Жегалкіна**.

<u>Перший спосіб:</u> за допомогою формули

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)}\left(x_1\oplus\overline{\sigma_1}\right)\left(x_2\oplus\overline{\sigma_2}\right)...\left(x_n\oplus\overline{\sigma_n}\right);$$

$$f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=1;$$

$$\left(f(x,y,z)=\sum_{(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)}\left(x_1\oplus\overline{\sigma_1}\right)\left(x_2\oplus\overline{\sigma_2}\right)\left(x_3\oplus\overline{\sigma_3}\right)\right).$$

<u>Розкрийте</u> дужки та спростіть вираз.

<u>Другий спосіб:</u> метод невизначених коефіцієнтів.

Будемо шукати поліном функції $f(x,y,z)$ у вигляді

$$f(x,y,z)=a_0+a_1x+a_2y+a_3z+a_4xy+a_5xz+a_6yz+a_7xyz.$$

Використовуючи таблицю істинності, підставляємо в останню рівність набори значень змінних і значень функцій, а потім знаходимо невизначені коефіцієнти.

Приклад 3. Потрібно знайти поліном Жегалкіна двома способами.

$f(x,y,z)=(00010101)$

xyz	f
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	0
111	1

1) $f(x,y,z)=(x\oplus 1)yz\oplus(x\oplus 0)(y\oplus 1)(z\oplus 0)\oplus$
$\oplus(x\oplus 0)(y\oplus 0)(z\oplus 0)=(x\oplus 1)yz\oplus xz(y\oplus 1)\oplus xyz=$
$=xyz\oplus yz\oplus xyz\oplus xz\oplus xyz=xz\oplus yz\oplus xyz;$

2) $f(x,y,z)=a_0+a_1x+a_2y+a_3z+a_4xy+a_5xz+a_6yz+a_7xyz;$

$f_2(0,0,0)=a_0=0 \Rightarrow \underline{a_0=0};$

$f_2(0,0,1)=a_0+a_3=0 \Rightarrow 0+a_3=0 \Rightarrow \underline{a_3=0};$

$f_2(0,1,0)=a_0+a_2=0 \Rightarrow 0+a_2=0 \Rightarrow \underline{a_2=0};$

$f_2(0,1,1)=a_0+a_2+a_3+a_6=1 \Rightarrow 0+0+0+a_6=1 \Rightarrow \underline{a_6=1};$

$f_2(1,0,0)=a_0+a_1=0 \Rightarrow 0+a_1=0 \Rightarrow \underline{a_1=0};$

$f_2(1,0,1)=a_0+a_1+a_3+a_5=1 \Rightarrow 0+0+0+a_5=1 \Rightarrow \underline{a_5=1};$

$f_2(1,1,0)=a_0+a_1+a_2+a_4=0 \Rightarrow 0+0+0+a_4=0 \Rightarrow \underline{a_4=0};$

$f_2(1,1,1)=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=1 \Rightarrow 1+1+a_7=1 \Rightarrow \underline{a_7=1};$

$f(x,y,z)=xz\oplus yz\oplus xyz.$

ЗАВДАННЯ. Розв'яжіть задачі самостійно!

Потрібно знайти поліном Жегалкіна двома способами:

a) *f(x,y,z)*=(11101100) b) *f(x,y,z)*=(10101101) c) *f(x,y,z)*=(00101101).

<u>Розділ 7.</u> Мінімізація булевих функцій

<u>Завдання мінімізації</u> полягає в тому, щоб знайти найпростішу формулу відповідно до обраного критерію мінімізації (наприклад, кількість змінних, кількість символів операцій).

Задача мінімізації кількості символів і операцій над множинами ДНФ і КНФ називається канонічною задачею мінімізації. В результаті отримуємо мінімальні ДНФ і КНФ.

Визначення

Імпліканта деякої функції φ — це така функція μ, що на всіх інтерпретаціях, де φ = 1 і функція μ = 1.

Мінтерми функції, елементарні кон'юнкції, що входять до ДНФ, є імплікантами функції.

Визначення

Множина *C* називається **повною системою імплікантних функці**й, якщо кожному одиничному значенню функції відповідає хоча б одна одиниця з множини імплікант *C*.

Визначення

Проста імплікантна функція називається **елементарною кон'юнкцією**, якщо жодна її власна частина не є імплікантою даної функції.

Визначення

Диз'юнкція всіх простих імплікантних функцій називається **скороченою диз'юнктивною нормальною формою**.

Визначення

Тупиковою ДНФ називається ДНФ даної булевої функці, що складається лише з простих імплікант (не обов'язково всіх).

Функція має одну скорочену ДНФ і кілька тупикових.

Визначення

Мінімальною ДНФ називають одну з тупикових ДНФ форм, якій відповідає найменше значення критерію мінімізації.

Наступні операції використовуються для отримання множини простих імплікант.

1. Операція неповного диз'юнктивного зв'язку

$Ax \vee A\bar{x} = A \vee Ax \vee A\bar{x}$.

2. Операція диз'юнктивного поглинання

$A \vee Ax = A$.

3. Повние диз'юнктивне склеювання

$Ax \vee A\bar{x} = A$.

Приклад 4. Нехай функція задана у вигляді досконалої диз'юнктивної нормальної формули $f\left(x, y, z\right) = xyz \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

Завершуємо перетворення, в результаті чого отримуємо дві різні кінцеві (тупикові) форми. Одна з них є мінімальною, оскільки містить найменшу кількість змінних і операцій.

1) $f\left(x, y, z\right) = \left(xyz \vee \bar{x}yz\right) \vee \left(\bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z\right) \vee \left(\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\right) =$

$= yz\left(x \vee \bar{x}\right) \vee \bar{x}z\left(y \vee \bar{y}\right) \vee \bar{x}\bar{y}\left(z \vee \bar{z}\right) = yz \vee \bar{x}z \vee \bar{x}\bar{y}$

2) $f\left(x, y, z\right) = \left(xyz \vee \bar{x}yz\right) \vee \left(\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\right) = yz \vee \bar{x}\bar{y}$.

Для аналізу зображень булевих функцій, визначених через КНФ за принципом двоїстості, використовуються поняття імпліценти, повної системи імпліцент, тупикової КНФ, скороченої КНФ та мінімальної КНФ.

Останній приклад показує, що використання елементарних перетворень не завжди зручно, особливо якщо функція представлена більш складною формулою.

Далі розглянемо графічний метод мінімізації функцій.

Це **<u>метод карт Карно і діаграм Вейча.</u>**

У картах Карно значення змінних розташовані в заголовках рядків і стовпців. Кожен мінтерм відповідає одній клітинці таблиці. Нуль або одиниця означає значення функції в цій інтерпретації. Значення змінних розташовані так, що сусідні рядки або стовпці таблиці відрізняються значенням лише однієї змінної.

Порядок розташування аргументів в карті Карно $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$.

$y \backslash x$	0	1
0	$\bar{x}\bar{y}$	$x\bar{y}$
1	$\bar{x}y$	xy

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$
1	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	xyz	$x\bar{y}z$

Рис.1. Структура карти Карно для функцій двох і трьох змінних

Надалі таблиці будуть заповнюватися одиницями і нулями. Якщо мінтерм і функція дорівнюють одиниці, то в клітинку записується одиниця, в інших випадках нуль.

Приклад 5. Побудуйте картку Карно для функції

$f(x,y,z)=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee\bar{x}yz\vee\bar{x}\bar{y}z\vee xyz.$

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	1	0

Рис.2. Карта Карно для $f(x,y,z)$

Після побудови карти Карно виконується операція склеювання (об'єднання) клітин.

Операцію склеювання можна здійснити тільки з сусідніми клітинами. У таблиці функцій двох змінних є дві сусідні клітинки, для функції трьох змінних - три клітинки і так далі.

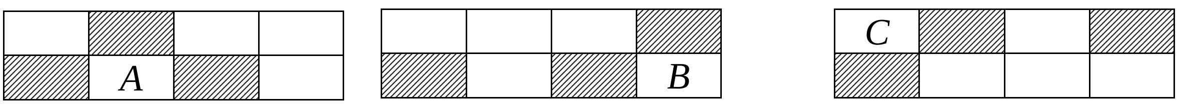


Рис.3. Сусідні клітини для клітин A , B, C

На рис.3 показано варіанти сусідніх комірок для функції трьох змінних.

Правило склеювання (об'єднання) клітин і запис мінімальної ДНФ.

1. Побудуйте карту Карно.

2. Об'єднайте клітинки в групи (тільки сусідні клітинки з одиницями). Група може включати 2^n комірки (2,4,8 ...). Група має прямокутну або квадратну форму.

3. Завдання зв'язування полягає в знаходженні множини максимальних груп. Кількість груп у наборі має бути мінімальною. (Чим більше одиниць входить до групи, тим краще. Груп має бути якомога менше).

4. Кожна одиниця карти Карно повинна бути принаймні в одній групі. Одиниці можуть бути включені в кілька груп, щоб збільшити розмір цих груп.

5. Кожній групі відповідає та імпліканта, дійсні змінні якої мають однакові значення для всіх клітинок групи, їх і виписують в мінімальну форму.

6. Диз'юнкція, отримана після зв'язування простих імплікант, є мінімальною ДНФ (МДНФ).

Проста імпліканта або мінтерм функції складається з усіх змінних, від яких залежить функція. Якщо одиниця є окремою групою, то мінтерм не змінюється і проблема мінімізації не вирішується. Якщо одиниці можна об’єднати в групи, то кількість змінних в імпліканті зменшується. Група з двох одиниць виключає одну змінну з імпліканти. Група з чотирьох дозволяє виключити дві змінні тощо. Тому метою є об’єднання підрозділів у великі групи, якщо це можливо.

Приклад 6. Знайдіть МДНФ для функції $f\left(x,y,z\right)=\overline{x}\overline{y}\overline{z}\vee\overline{x}yz\vee\overline{x}\overline{y}z\vee xyz.$

z \ xy	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	1	0

A B

$A:\ \overline{x}\overline{y},\quad B: yz;$

$МДНФ: f\left(x,y,z\right)=\overline{x}\overline{y}\vee yz.$

Приклад 7. Знайдіть МДНФ для функції $f\left(x,y,z\right)=\overline{x}y\overline{z}\vee xy\overline{z}\vee\overline{x}\overline{y}z\vee xyz.$

z \ xy	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	1	0

$f\left(x,y,z\right)=A\vee B\vee C=\overline{x}\overline{y}z\vee y\overline{z}\vee xy.$

Приклад 8. Знайдіть МДНФ для функції

$f\left(x,y,z\right)=xyz\vee xy\overline{z}\vee x\overline{y}z\vee x\overline{y}\overline{z}\vee\overline{x}y\overline{z}\vee\overline{x}\overline{y}z\vee\overline{x}\overline{y}\overline{z}.$

z \ xy	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	0	1	1

B C

A

$f\left(x,y,z\right)=\overline{y}\vee\overline{z}\vee x.$

Для функції чотирьох змінних кожна клітинка має чотири сусідні клітинки. Сусідніми є не тільки крайній лівий і правий стовпці, а й верхній і нижній рядки.

Для функції п’яти змінних - це двошарова карта Карно. Кожен шар складається з перших чотирьох змінних. Перший рівень містить усі інтерпретації, де п’ята змінна дорівнює нулю, а другий шар містить п’яту змінну, що дорівнює одиниці. Для кожної комірки п'ять сусідніх - чотири на своєму шарі, п'ята на другому шарі, за умови збігу клітинок при накладанні шарів.

Приклад 9. Знайдіть МДНФ для функції

$f\left(x,y,z,t\right)=xyz\overline{t}\vee x\overline{y}zt\vee\overline{x}yzt\vee\overline{x}\overline{y}zt\vee x\overline{y}\overline{z}t\vee\overline{x}\overline{y}\overline{z}t\vee\overline{x}\overline{y}z\overline{t}\vee\overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{t}.$

$zt \backslash xy$	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11	1	1		1
10			1	

A A D C B

$$f\left(x,y,z,t\right)=\bar{y}\bar{z}\vee\bar{y}t\vee\bar{x}zt\vee xyz\bar{t}.$$

Приклад 10. Знайдіть МДНФ для функції

$$f\left(x,y,z,t,w\right)=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}\bar{w}\vee\bar{x}y\bar{z}\bar{t}\bar{w}\vee xyztw\vee xy\bar{z}\bar{t}w\vee\bar{x}y\bar{z}\bar{t}w\vee xyzt\bar{w}\vee xyz\bar{t}\bar{w}\vee$$

$$\vee x\bar{y}z\bar{t}\bar{w}\vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t}\bar{w}\vee xy\bar{z}\bar{t}\bar{w}\vee x\bar{y}z\bar{t}w\vee xyz\bar{t}w\vee x\bar{y}z\bar{t}w\vee x\bar{y}ztw.$$

$zt \backslash xy$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01				
11			1	1
10			1	1

w=0

$zt \backslash xy$	00	01	11	10
00		1	1	
01				
11			1	1
10			1	1

w=1

$$f\left(x,y,z,t,w\right)=\bar{z}\bar{t}\bar{w}\vee y\bar{z}\bar{t}\vee xz.$$

Для мінімізації на множині кон'юнктивних нормальних форм використовуються діаграми Вейча. На картках позначені комірки з інтерпретаціями, що дорівнюють нулю. Після склеювання клітини утворюють мінімальну кон’юнктивну нормальну форму. Результатом мінімізації є кон'юнкція елементарних диз'юнкцій.

Приклад 11. Створіть МДНФ для функції

$$f\left(x,y,z,t,w\right)=\left(x\vee y\vee z\vee t\vee w\right)\cdot\left(x\vee y\vee z\vee t\vee\bar{w}\right)\cdot\left(x\vee y\vee\bar{z}\vee t\vee w\right)\cdot$$

$$\cdot\left(x\vee y\vee\bar{z}\vee\bar{t}\vee w\right)\cdot\left(x\vee y\vee\bar{z}\vee t\vee w\right)\cdot\left(x\vee\bar{y}\vee\bar{z}\vee\bar{t}\vee w\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\bar{x}\vee y\vee z\vee t\vee w\right)\cdot\left(\bar{x}\vee y\vee z\vee t\vee\bar{w}\right)\cdot\left(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z}\vee t\vee w\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee t \vee \bar{w}\right).$$

xy \ *zt*	00	01	11	10
00	0			0
01				
11	0	0		
10	0	0	0	

w=0   *A*, *B*, *C*

xy \ *zt*	00	01	11	10
00	0			0
01				
11				
10				0

w=1   *A*, *D*

$$f\left(x,y,z,t,w\right)=A\wedge B\wedge C\wedge D=\left(y\vee z\vee t\right)\cdot\left(x\vee\bar{z}\vee w\right)\cdot\left(\bar{y}\vee\bar{z}\vee t\vee w\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\bar{x}\vee y\vee t\vee\bar{w}\right).$$

Якщо функція ***визначена частково***, вона перевизначається так, щоб отримати найбільш економічну мінімальну форму.

Приклад 12. Функція $f\left(x,y,z,t\right)=1$ на множинах $\left(0,0,1,0\right)$, $\left(0,1,1,0\right)$, $\left(1,0,1,0\right)$, $\left(1,0,0,0\right)$ і не визначена, якщо $xy=1$. Знайдіть МДНФ.

$$f\left(x,y,z,t\right)=z\bar{t}\vee x\bar{t}$$

Приклад 13. Функція $f\left(x,y,z,t\right)=1$ на множинах $\left(0,0,1,0\right)$, $\left(0,1,1,0\right)$, $\left(1,0,1,0\right)$, $\left(1,0,0,0\right)$ і не визначена, якщо $xy=1$. Знайдіть МДНФ.

xy \ *zt*	00	01	11	10
00			-	1
01			-	
11			-	
10	1	1	-	1

A, *B*

$$f\left(x,y,z,t\right)=z\bar{t}\vee x\bar{t}$$

Контрольні питання

1. У чому полягає критерій мінімізації?
2. Які основні цілі мінімізації?

3. У чому сенс мінімізації методом карт Карно?

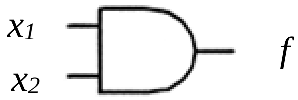
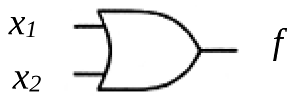
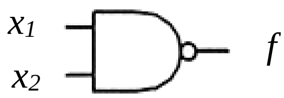
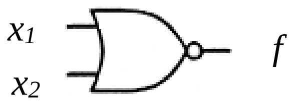
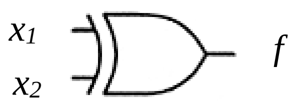
4. Що таке алгоритм мінімізації за методом Карно?

5. Чим метод діаграм Вейча відрізняється від методу Карно?

<u>Розділ 8.</u> Логічні схеми

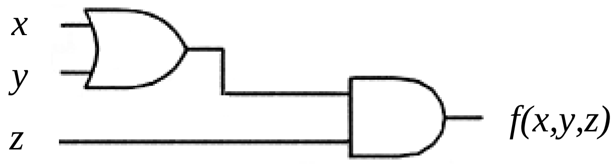
Логічні схеми в комп'ютерах та інших електронних пристроях працюють з наборами вхідних і вихідних даних, які складаються з нулів і одиниць. Булева алгебра і булеві функції є математичним апаратом для роботи з такими даними і використовуються для аналізу і синтезу логічних схем. Основою побудови логічних схем є набір логічних елементів. Кожен логічний елемент реалізує деяку булеву функцію. Його входи відповідають булевим змінним, а вихід – значенню функції. Найбільш часто використовувані символи логічних елементів наведені в таблиці.

Таблиця 1. Основні логічні елементи

Булева функція	Символ логічного елемента
$f = x_1 \wedge x_2$	
$f = x_1 \vee x_2$	
$f = \overline{x}$	
$f = \overline{x_1 \wedge x_2}$ (штрих Шеффера)	
$f = \overline{x_1 \vee x_2}$ (стріла Пірса)	
$f = x_1 \oplus x_2$ (XOR)	

Набір логічних елементів вважається повним, якщо його можна використовувати для реалізації будь-якої булевої функції.

Приклад 1. Побудуйте логічну схему, яка реалізує функцію



$$f(x,y,z)=(x\vee y)z.$$

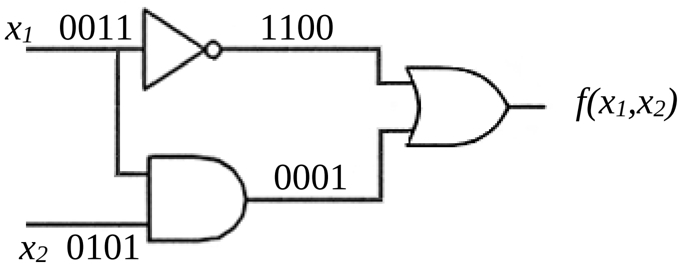
Логічні елементи, що зображують на діаграмах операції з властивостями асоціативності та комутативності, можуть бути зображені з кількістю входів більше двох. Це означає повторне використання цієї операції. Наприклад, диз'юнкція трьох елементів.

$$y = x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

Під час вивчення логічних схем постають дві основні задачі: аналіз і синтез. Аналіз логічної схеми полягає в побудові булевої функції, яку реалізує цей пристрій. Для цього на всіх наборах даних визначається вихідний сигнал і складається таблиця істинності функції. Потім будуються ідеальні розділові або сполучникові форми. З іншого боку, за появою логічного ланцюжка можна спочатку побудувати формулу булевої функції, а потім таблицю істинності.

Завдання синтезу полягає в побудові логічного ланцюжка для функції, яка задана таблицею істинності або формулою. Цінність логічного ланцюжка полягає в його простоті. Тому перед побудовою логічної схеми необхідно отримати мінімальну форму булевої функції.

Приклад 2. Запишіть булеву функцію у вигляді логічної схеми. Побудуйте мінімальну логічну схему.



Побудуйте таблицю істинності функції та її формули

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \vee \overline{x_1}$$

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Мінімізуємо формулу $f(x_1, x_2) = \overline{x_1} \vee x_2$.

x_2 \ x_1	0	1
0	1	0
1	1	1

Один елемент скорочено.

Контрольні питання

1. У яких завданнях зручно використовувати логічні схеми?
2. Як здійснюється перехід від формули булевої алгебри до логічної схеми?

Список літератури

1. Олійник Л.О. «Дискретна математика». Навч.посібник. Каменськоє. 2015. 256с.

2.West D., Introduction to Graph Theory. Prentice-Hall. Upper Saddle River. N. J. 2000.

3. Матвієнко М.П. Дискретна математика. Суми. 2019. 324 с.

Кагадій Тетяна Станіславівна
Шпорта Анна Григорівна
Онопрієнко Олег Дмитрович

ОСНОВИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ
(частина 1)

Методичні рекомендації до опанування лекційних занять

з дисципліни «Дискретна математика» здобувачами ступеня бакалавра спеціальності 113 Прикладна математика

В авторській редакції

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.